



Universidad
Zaragoza



Trabajo de Fin de Grado de Física

MODELOS PREDICTIVOS PARA LA SIMULACIÓN DE FLUJOS OCEÁNICOS

Autora:

Irantzu Landa García

Dirigido por:

Pilar García Navarro

Javier Fernández Pato

ÁREA DE MECÁNICA DE FLUIDOS

UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA

Junio 2019

Resumen

El estudio de flujos oceánicos en zonas costeras resulta de especial interés a la hora de abordar situaciones relevantes como, por ejemplo, el efecto de las mareas sobre la playa o los tsunamis. En este trabajo, se emplea la simulación numérica como herramienta predictiva de estos y otros fenómenos asociados al flujo oceánico. El objetivo principal se centra en el estudio de la aplicabilidad de dos esquemas numéricos (Lax-Friedrichs y MacCormack) a la resolución de las ecuaciones de aguas poco profundas bidimensionales. Mediante la solución de cuatro casos de estudio transitorios se comparan ambos métodos y se validan mediante soluciones exactas y medidas experimentales. En general, ambos esquemas generan resultados aceptables, siendo el método de MacCormack más preciso en situaciones transitorias bruscas, debido a su carácter de segundo orden.

Índice general

1. Introducción y objetivos	1
1.1. Introducción	1
1.2. Objetivos	3
2. Ecuaciones y modelos	4
2.1. Ecuaciones gobernantes	4
2.1.1. Condiciones de contorno	6
2.1.2. Análisis dimensional	7
2.1.3. Modelo promediado	8
2.2. Esquemas numéricos	10
2.2.1. Esquema de Lax-Friedrichs	11
2.2.2. Esquema de MacCormack	12
3. Resultados numéricos	14
3.1. Rotura de presa en 1D	14
3.2. Simulación de ajuste geostrófico	15
3.3. Flujo de marea en una pendiente de playa	16
3.4. Tsunami	19
4. Conclusiones y trabajo futuro	22
Bibliografía	24
A. Teorema de Transporte de Reynolds para volúmenes fluidos	26
B. Ecuaciones de Navier-Stokes	27
B.0.0.1. Ecuación de continuidad	27
B.0.0.2. Ecuación de cantidad de movimiento.	27

C. Método de diferencias finitas	29
D. Esquema de MacCormack, discretización de las ecuaciones	30

Capítulo 1

Introducción y objetivos

1.1. Introducción

El estudio del movimiento del agua del mar en zonas cercanas a la costa resulta de especial interés en multitud de situaciones, como por ejemplo, en la influencia de las mareas sobre las zonas de playa, flujo del agua en zonas portuarias o en situaciones extremas como los tsunamis.

La simulación mediante técnicas numéricas de este tipo de fenómenos es una herramienta muy práctica a la hora de predecir o mitigar los posibles efectos adversos o elaborar planes de riesgos en determinadas zonas de costa. El incremento de la potencia de los ordenadores personales en las últimas décadas ha permitido una evolución muy rápida de las técnicas de simulación, pudiéndose obtener resultados predictivos en tiempo real (o incluso más rápidamente) [9] [12] [7]. Esta metodología resulta interesante porque nos permite obtener una predicción cuantitativa y cualitativa del flujo.

En concreto, el movimiento del agua en regiones costeras se puede modelizar adecuadamente mediante las ecuaciones de aguas poco profundas en 2D, también conocidas como *Shallow Water Equations* [3] [4] [8], siempre que las velocidades en la dirección vertical sean despreciables [3] [4]. Estas ecuaciones constituyen un sistema hiperbólico que nos permite resolver las variables de calado y caudal en cualquier región del espacio.

Dado que estas ecuaciones no tienen solución exacta en la mayoría de situaciones, resulta imprescindible el uso de un método numérico para obtener su solución. Los métodos numéricos se han convertido en una herramienta muy común tanto en situaciones estacionarias como transitorias de sistemas fluidos. En particular, ha sido ampliamente estudiada la aplicación de diferencias y volúmenes finitos en los esquemas numéricos para ecuaciones de evolución temporal. Los métodos explícitos son atractivos gracias a su simplicidad de programación. Las variables se evalúan en cada punto de la malla a través de cálculos algebraicos simples teniendo en cuenta los valores de las variables ya conocidos en el instante de tiempo anterior. Por otro lado, el paso de tiempo tiene que restringirse por posibles problemas de estabilidad. Otra opción la constituyen los esquemas implícitos [3] [4], en los cuales las variables se calculan simultáneamente en el tiempo futuro, a través de la resolución de un sistema de ecuaciones con tantas incógnitas como nodos en la malla. Si el problema no es lineal, el sistema algebraico tampoco lo es, por lo que se requiere una linealización del problema o un método iterativo para resolverlo. Este trabajo “extra”, normalmente viene recompensado por la condición de estabilidad incondicional, permitiendo que los pasos de tiempo sean tan grandes como se quiera. Por lo tanto, son candidatos ideales para el cálculo de estados estacionarios.

Los esquemas implícitos se basan en evaluar flujos y términos fuente en tiempo t^{n+1} . Esto permite relajar la condición de estabilidad e incluso obtener esquemas numéricos incondicionalmente estables. Por eso han sido tradicionalmente los métodos más atractivos en CFD para resolver flujos estacionarios o gradualmente transitorios. En sistemas de ecuaciones no lineales la evaluación de flujos y términos fuente en t^{n+1} es demasiado complicada para resolverse y debe ser linealizada.

Por otro lado, los esquemas numéricos explícitos se basan en la regla de integración temporal de Euler, que evalúa el valor de las funciones en tiempo t^n de forma que los valores incógnita de la variable en tiempo t^{n+1} dependen únicamente de los valores conocidos en tiempo t^n . Esto hace que los esquemas explícitos sean ampliamente usados en la Dinámica de Fluidos Computacional por su gran simplicidad. Sin embargo, en todos estos métodos el tamaño de paso temporal está limitado por la condición de estabilidad de Courant-Friedrichs-Lewy, la cual puede ser demasiado restrictiva y exigir tiempos de cálculo demasiado altos en algunos casos.

Los primeros métodos explícitos que se desarrollaron para resolver ecuaciones transitorias estaban basados en diferencias centradas. Entre ellos, el primero en obtener soluciones fiables fue el esquema de Lax-Friedrichs [7]. Este esquema es muy simple y robusto, sin embargo su viscosidad artificial hace que sea excesivamente difusivo y además es poco preciso a la hora de calcular soluciones estacionarias. Existe la posibilidad de desarrollar métodos basados en dos pasos simples predictor-corrector, de segundo orden en espacio y tiempo. Entre esta familia de esquemas predictor-corrector, el esquema de MacCormack [6] [15] es el más usado por su simplicidad y por su buen comportamiento en ecuaciones no lineales, aunque produce oscilaciones numéricas en la propagación de discontinuidades. En consecuencia, en este trabajo se emplearán y compararán los esquemas mencionados. Esta comparación resulta de especial interés debido al distinto orden de precisión de ambos esquemas.

Como casos prácticos para validar ambos esquemas, se propone un caso de rotura de presa en 1D [6] [7] [15] con solución exacta [8], la simulación de una onda de marea en una playa con pendiente adversa [5] y una rotura de presa en 2D con forma elíptica [2] [10] [14] en el que se pretende evaluar el efecto de la fuerza de Coriolis. Como aplicación práctica final, se simulará un tsunami [11] a escala de laboratorio en el que se dispone de medidas experimentales para la evolución temporal del nivel de agua en algunos puntos concretos.

El presente trabajo se divide en los siguientes apartados: en el Capítulo 2 se presenta un resumen de los objetivos del trabajo, así como de los recursos empleados para su consecución. En el Capítulo 3 se incluye una explicación detallada del modelo matemático y los esquemas numéricos empleados, haciendo especial énfasis en sus propiedades numéricas. El Capítulo 4 está dedicado a la presentación de los resultados numéricos de los casos mencionados anteriormente. Finalmente, se presentan las conclusiones obtenidas y el trabajo futuro en el Capítulo 5.

1.2. Objetivos

Los propósitos principales de este trabajo son:

- Formular los flujos oceánicos costeros mediante ecuaciones matemáticas
- Plantear modelos útiles y sencillos para la simulación de dichas ecuaciones
- Programar los esquemas descritos y aplicarlos a varios casos tanto en una como en dos dimensiones, probando su fiabilidad

Para el primer propósito, se parte de leyes físicas de conservación de masa y conservación de cantidad de movimiento, para describir la fenomenología de un flujo cualquiera, dada por las ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles [3] [4]. A continuación, se considera el caso particular a estudiar: los océanos. En este caso, se tiene un flujo cuya superficie superior se encuentra libre, y cuyas dimensiones horizontales son tales, que pueden despreciarse las aceleraciones verticales, obteniendo una distribución de presión hidrostática [3] [4]. Así, las ecuaciones desarrolladas previamente se simplifican, obteniéndose las ecuaciones llamadas ecuaciones de aguas poco profundas [8] [3] [4]. Estas ecuaciones se usan normalmente para describir tanto el movimiento de los fluidos en ríos, canales, áreas costales, como para describir la circulación atmosférica y oceánica, caso particular que se desea tratar en este trabajo. Se obtienen así las ecuaciones que describen el sistema de interés partiendo de leyes físicas.

Una vez obtenidas las ecuaciones que describen el sistema, el segundo propósito es formular esquemas numéricos que, mediante aproximaciones, permiten resolverlas computacionalmente dado que se trata de ecuaciones que carecen de solución analítica. Concretamente, se describen dos esquemas conocidos, el esquema de Lax-Friedrichs [7], y el esquema de MacCormack [6] [15]. Dichos esquemas forman parte de un modelo computacional que se programará en lenguaje C.

Finalmente, se estudian varios casos en los que se muestra la validez de lo relatado. Se inicia por casos sencillos en 1D, lo que permite comprobar que los esquemas funcionan correctamente, y se pasa a continuación a casos más complejos en 2D.

Capítulo 2

Ecuaciones y modelos

Para poder modelar un flujo, hace falta primero un conjunto de ecuaciones que expresen las leyes físicas presentes en el problema. En este capítulo, se comienza presentando un desarrollo de dichas ecuaciones, partiendo de leyes físicas básicas, para posteriormente llegar a las ecuaciones denominadas ecuaciones de aguas poco profundas, realizando una serie de aproximaciones.

Una vez se tienen las ecuaciones que gobiernan el flujo, resulta necesario recurrir a un esquema numérico que nos ayude a resolverlas computacionalmente, puesto que, en general no tienen solución analítica. En consecuencia, se da la descripción de dos esquemas numéricos, el esquema de Lax-Friedrichs, y el esquema de MacCormack, con los que se trabaja en capítulos posteriores.

2.1. Ecuaciones gobernantes

El desarrollo de las ecuaciones de flujo con lámina libre se realiza empleando la formulación diferencial, para lo que se debe considerar un volumen fluido. Se trata de una porción finita de fluido que contiene siempre las mismas partículas, y en consecuencia conserva la cantidad de masa, tomando la velocidad que toman las partículas que lo componen.

La finalidad de este trabajo es modelar flujos oceánicos, es decir, flujos en los que el contorno superior del dominio no está limitado por ninguna superficie, este tipo de flujos en los que se tiene un contorno libre, son los llamados flujo de lámina libre. En la figura 2.1 se representa una porción de flujo de lámina libre, junto con las coordenadas del sistema. $z_b(x, y)$ es la coordenada que define la superficie del fondo, $d(x, y, t)$ es la coordenada que define la superficie libre, y $h(x, y, t) = d(x, y, t) - z_b(x, y)$ es el calado del agua.

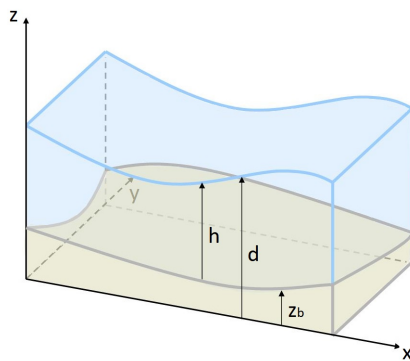


Figura 2.1: Coordenadas del sistema

La introducción de contorno libre complica la resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes (apéndice B), por lo que resulta útil realizar una serie de aproximaciones con el fin de simplificarlas. Para empezar, se desprecia la compresibilidad del fluido, ($\rho = cte.$) lo que permite escribir las ecuaciones de la manera:

Ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.1)$$

Ecuaciones de cantidad de movimiento:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho uw)}{\partial z} &= \rho f v - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \\ \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v^2)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho vw)}{\partial z} &= -\rho f u - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \\ \frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uw)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho vw)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w^2)}{\partial z} &= -\rho g + \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Los términos presentes en las ecuaciones de conservación de cantidad de movimiento, 2.2, son:

- La aceleración local (derivada temporal del miembro izquierdo)
- Los términos convectivos (derivadas espaciales del miembro izquierdo)
- Las fuerzas másicas, entre las cuales se encuentran la gravedad en el eje z , ρg , y la fuerza de Coriolis en los ejes x e y , $-\rho f u$ y $\rho f v$, respectivamente, siendo

$$f = 2\Omega \sin \phi$$

el parámetro de Coriolis, con ϕ la latitud a la que se encuentra el sistema, y Ω la velocidad angular de rotación de la Tierra, $\Omega = 7,292 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$.

- Las fuerzas superficiales: Fuerzas de presión, formuladas a partir de las derivadas parciales de la presión, y términos viscosos (derivadas restantes). Éstos últimos se expresan en función de la deformación:

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (2.3)$$

donde μ es el coeficiente de viscosidad dinámica. En la mayoría de las aplicaciones reales, el flujo es turbulento. Una aproximación habitual es aplicar el promediado de Reynolds a las ecuaciones de Navier-Stokes (RANS). Esto da lugar a un sistema de ecuaciones con la misma forma que el original en función de variables promediadas en el tiempo que requieren la formulación de nuevos esfuerzos turbulentos.

$$\tau_{ij} = \mu_T \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (2.4)$$

donde μ_T es la viscosidad turbulenta o *viscosity*, que debe ser modelada o calibrada [16].

2.1.1. Condiciones de contorno

Resulta necesario en este punto considerar ciertas condiciones que tendrán que cumplirse en el fondo y en la superficie libre. Para el fondo, se considera que éste es rígido, de manera que las partículas del fluido no lo traspasan, esto implica la condición de velocidad normal nula:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_b = 0$$

La variable \mathbf{n}_b es la normal de la superficie que define el fondo, que viene dada por $S_f \equiv z - z_b = 0$, y en consecuencia

$$\mathbf{n}_b = \nabla \cdot S_f = \mathbf{z} - \frac{\partial z_b}{\partial x} \mathbf{x} - \frac{\partial z_b}{\partial y} \mathbf{y}.$$

Con todo esto, la condición en el fondo resulta:

$$-u \frac{\partial z_b}{\partial x} - v \frac{\partial z_b}{\partial y} + w = 0, \text{ en } z = z_b(x, y) \quad (2.5)$$

Por otro lado, en la superficie libre, dada por $S_l \equiv z - d = 0$, se considera que las velocidades normales a ésta hacen que la superficie se deforme, por lo que, operando de manera análoga al fondo, la condición en la superficie libre queda:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_l = \frac{\partial d}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial d}{\partial t} + u \frac{\partial d}{\partial x} + v \frac{\partial d}{\partial y} = w, \text{ en } z = d(x, y, t) \quad (2.6)$$

Por otro lado, las condiciones de contorno dinámicas expresan condiciones sobre las fuerzas que actúan en los contornos. En el fondo, debido a la fuerza viscosa se tiene

$$u = v = 0.$$

En la superficie libre, se supone continuidad de esfuerzos de presión. Tanto en el fondo como en la superficie libre la continuidad de esfuerzos cortantes implica

$$\begin{aligned} f_{bx} &= \tau_{xx} |_{z_b} \frac{\partial z_b}{\partial x} + \tau_{xy} |_{z_b} \frac{\partial z_b}{\partial y} - \tau_{xz} |_{z_b}, \\ f_{sx} &= -\tau_{xx} |_d \frac{\partial d}{\partial x} - \tau_{xy} |_d \frac{\partial d}{\partial y} + \tau_{xz} |_d, \end{aligned} \quad (2.7)$$

respectivamente.

La siguiente aproximación es la aproximación de aguas poco profundas o *shallow water flow*, en la que se considera que las dimensiones horizontales del problema son mucho mayores que la dimensión vertical. Promediando las ecuaciones en la dirección vertical a lo largo de una columna líquida, se elimina la coordenada vertical como variable independiente, y la superficie deja de ser un problema de contorno.

2.1.2. Análisis dimensional

Se realiza un análisis dimensional de las ecuaciones 2.1 y 2.2, con el fin de demostrar que las aceleraciones verticales en el caso de la aproximación de aguas poco profundas pueden despreciarse, dando lugar a una distribución de presión hidrostática. Para ello, se definen las escalas características como: $[x] = [y] = L$, $[z] = d$, $[u] = [v] = U$, y $[w] = V$.

Introduciendo esto en la ecuación 2.1 se tiene:

$$\frac{V}{d} \approx \frac{U}{L} \rightarrow V \approx U \cdot \frac{d}{L} \ll U$$

La velocidad vertical resulta despreciable frente a las velocidades horizontales.

Teniendo en cuenta esta última relación, se introducen las escalas características en la ecuación de cantidad de movimiento en z , y se observa que:

- La aceleración local es del orden $\rho \frac{dU}{L} \frac{U}{t}$. Comparando con el término gravitatorio,

$$\frac{\text{aceleración local}}{\text{t.gravitatorio}} \approx \frac{\rho d U}{L t \rho g} = St Fr^2 \left(\frac{d}{L} \right) \approx \frac{d}{L},$$

donde St es el número de Strouhal (describe los mecanismos de flujo oscilante, toma valores en torno a la unidad), y Fr es el número de Froude (distingue que un flujo sea de regímenes rápidos o no, toma siempre un valor en torno a 1), vemos que el término de aceleración local resulta despreciable frente al término gravitatorio.

- Los términos convectivos resultan todos del orden $\rho \frac{d}{L} U^2 L$, de manera que en comparación con el término gravitatorio,

$$\frac{\text{t.convectivo}}{\text{t.gravitatorio}} = \frac{\rho d U^2}{L^2 \rho g} = Fr^2 \left(\frac{d}{L} \right) \approx \frac{d}{L},$$

también resultan despreciables.

- El término difusivo mayor es de orden $\mu \frac{U}{dL} = \mu \frac{L}{d} \frac{U}{L^2}$. Similarmente a los dos anteriores, frente al término gravitatorio,

$$\frac{\text{t.difusivo}}{\text{t.gravitatorio}} = \frac{\mu U}{L d \rho g} = \frac{Fr^2}{Re},$$

resulta despreciable (Re es el llamado número de Reynolds, para sistemas macroscópicos toma valores mucho mayores que la unidad).

En consecuencia, la tercera ecuación de cantidad de movimiento se reduce a

$$\frac{\partial p}{\partial z} \approx -\rho g \rightarrow p = \rho g(d - z),$$

donde se ha considerado la presión en la superficie libre nula. A esta aproximación se la denomina presión hidrostática vertical, y es resultado de tener aceleraciones verticales despreciables. Sustituyendo esta última expresión en 2.2:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{\partial uw}{\partial z} &= fv - g \frac{\partial d}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{\partial vw}{\partial z} &= -fu - g \frac{\partial d}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g &= 0\end{aligned}\tag{2.8}$$

2.1.3. Modelo promediado

Una vez simplificadas las ecuaciones, se prosigue con la integración sobre la vertical, con el fin de eliminar la coordenada vertical como variable independiente, tal y como se hace en [4] [3].

La integración de la ecuación 2.1,

$$\int_{z_b}^h \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dz = 0,$$

mediante la aplicación de la regla de Leibniz, conduce a:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^d u dz - \frac{\partial d}{\partial x} u|_d + \frac{\partial z_b}{\partial x} u|_{z_b} + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^d v dz - \frac{\partial d}{\partial y} v|_d + \frac{\partial z_b}{\partial y} v|_{z_b} + [w]_{z_b}^d = 0\tag{2.9}$$

Introduciendo las ecuaciones 2.5 y 2.6 en 2.9, esta última ecuación se reduce a

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^d u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^d v dz + \frac{\partial d}{\partial t} = 0.$$

Considerando que

$$\bar{u} = \frac{1}{h} \int_{z_b}^d u dz, \text{ y } \bar{v} = \frac{1}{h} \int_{z_b}^d v dz,$$

son los promedios verticales de las velocidades u y v , y que $d(x, y, t) = h(x, y, t) + z_b(x, y)$, queda finalmente:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}h)}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{v}h)}{\partial y} = 0\tag{2.10}$$

El proceso con las ecuaciones de conservación de movimiento en las direcciones x e y es análogo. La integración vertical de la ecuación de movimiento en x ,

$$\int_{z_b}^d \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} + \frac{\partial(uw)}{\partial z} \right) dz = \int_{z_b}^d \left(-g \frac{\partial d}{\partial x} + fv + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) \right) dz,$$

y la aplicación de la regla de Leibniz conducen a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_b}^d u dz + u|_{z_b} \frac{\partial z_b}{\partial t} - u|_d \frac{\partial d}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^d u^2 dz + u^2|_{z_b} \frac{\partial z_b}{\partial x} - u^2|_d \frac{\partial d}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^d uv dz \\ + (uv)|_{z_b} \frac{\partial z_b}{\partial y} - (uv)|_d \frac{\partial d}{\partial y} + [uw]_{z_b}^d = -gh \frac{\partial d}{\partial x} + f\bar{v}h + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^d \tau_{xx} dz + \tau_{xx}|_{z_b} \frac{\partial z_b}{\partial x} \right. \\ \left. - \tau_{xx}|_d \frac{\partial d}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^d \tau_{xy} dz + \tau_{xy}|_{z_b} \frac{\partial z_b}{\partial y} - \tau_{xy}|_d \frac{\partial d}{\partial y} + [\tau_{xz}]_{z_b}^d \right] \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta las condiciones de contorno 2.5 2.6 2.7, y descomponiendo

$$-gh \frac{\partial d}{\partial x} = -gh \frac{\partial h}{\partial x} - gh \frac{\partial z_b}{\partial x} = -\frac{1}{2} g \frac{\partial (h^2)}{\partial x} - gh \frac{\partial z_b}{\partial x},$$

queda:

$$\frac{\partial(h\bar{u})}{\partial t} + \frac{\partial(h\bar{u}^2 + 1/2gh^2)}{\partial x} + \frac{\partial(h\bar{u}\bar{v})}{\partial y} = -gh \frac{\partial z_b}{\partial x} + f\bar{v}h + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial(\tau_{xx} \cdot h)}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_{xy} \cdot h)}{\partial y} \right) + \frac{f_{sx}}{\rho} - \frac{f_{bx}}{\rho}$$

Finalmente, escribiendo los términos viscosos en función de la deformación y haciendo uso de la incompresibilidad del flujo (ecuación 2.4):

$$\frac{\partial(h\bar{u})}{\partial t} + \frac{\partial(h\bar{u}^2 + 1/2gh^2)}{\partial x} + \frac{\partial(h\bar{u}\bar{v})}{\partial y} = -gh \frac{\partial z_b}{\partial x} + f\bar{v}h + \mu_T h \nabla^2 \bar{u} + \frac{f_{sx}}{\rho} - \frac{f_{bx}}{\rho} \quad (2.11)$$

Análogamente, se obtiene para la ecuación de conservación de cantidad de movimiento en el eje y:

$$\frac{\partial(h\bar{v})}{\partial t} + \frac{\partial(h\bar{u}\bar{v})}{\partial x} + \frac{\partial(h\bar{v}^2 + 1/2gh^2)}{\partial y} = -gh \frac{\partial z_b}{\partial y} - f\bar{u}h + \mu_T h \nabla^2 \bar{v} + \frac{f_{sy}}{\rho} - \frac{f_{by}}{\rho} \quad (2.12)$$

En resumen, se llega al sistema de ecuaciones:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} = \mathbf{S}, \text{ donde } \begin{cases} \mathbf{U} = (h, hu, hv)^T \\ \mathbf{F} = (hu, hu^2 + 1/2gh^2, huv)^T \\ \mathbf{G} = (hv, huv, hv^2 + 1/2gh^2)^T \\ \mathbf{S} = (0, S_x, S_y)^T \end{cases} \quad (2.13)$$

Nótese que se han obviado las barras de promedio vertical.

El vector \mathbf{U} hace referencia a las variables conservadas, los vectores \mathbf{F} y \mathbf{G} a los flujos en el eje x y en el eje y, respectivamente, y el vector \mathbf{S} a los términos fuente, con

$$S_x = -gh \left(\frac{\partial z_b}{\partial x} + \frac{n^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}} \right) + f\bar{v}h + \mu_T h \nabla^2 u + \frac{f_{sx}}{\rho},$$

los términos fuente en el eje x, y

$$S_y = -gh \left(\frac{\partial z_b}{\partial y} + \frac{n^2 v \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}} \right) - f\bar{u}h + \mu_T h \nabla^2 v + \frac{f_{sy}}{\rho},$$

los términos fuente en el eje y . Se han expresado los términos de fricción en el fondo mediante la expresión de Manning [9],

$$\frac{f_{bx}}{\rho} = \frac{n^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}},$$

$$\frac{f_{by}}{\rho} = \frac{n^2 v \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}},$$

donde n es el coeficiente de Manning, que toma valores entre 10^{-1} y 10^{-2} . Los esfuerzos f_{sx} y f_{sy} son debidos al viento y en lo que sigue no serán considerados.

El sistema 2.13, se trata de un sistema hiperbólico de ecuaciones, y se utiliza para flujos en lámina libre bajo la consideración de aguas poco profundas, es decir, el caso a tratar en este trabajo.

Analizando por simplicidad el caso unidireccional (la coordenada y no influye), $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{U})$ y es posible escribir el sistema en la forma

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{J} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = \mathbf{S}, \quad (2.14)$$

donde la matriz Jacobiana del sistema es

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c^2 - u^2 & 2u \end{pmatrix}, \quad (2.15)$$

donde $c = \sqrt{gh}$ es la celeridad de las ondas superficiales de pequeña amplitud. El Jacobiano es diagonalizable y los valores y vectores propios son:

$$a^{1,2} = u \pm c$$

$$\mathbf{e}^{1,2} = (1, u \pm c)^T.$$

Los valores propios del Jacobiano son necesarios para establecer condiciones de estabilidad numérica, como veremos más adelante.

2.2. Esquemas numéricos

Se desea resolver el conjunto de ecuaciones de aguas poco profundas 2.13 desarrolladas en la sección anterior, que se trata de un conjunto de ecuaciones en derivadas parciales que no presentan una solución analítica.

Se discretiza el dominio de soluciones en celdas, que en este caso serán cuadradas y uniformes. Las variables toman su valor en centro de las celdas. De esta manera las coordenadas continuas pasan a ser pequeños intervalos Δx , Δy y Δt . Ésto, en combinación con las aproximaciones en las ecuaciones gobernantes introduce un error de truncación en las soluciones.

Algunas aproximaciones bidimensionales se basan en la contemplación de la situación 2D como dos problemas 1D y usar un esquema 1D para cada subproblema. Los métodos de tipo

descentrado son muy populares a la hora de simular flujos en los que domina marcadamente el término advectivo y en particular aquellos que contienen discontinuidades muy fuertes. La idea esencial del método descentrado se basa en la reducción del problema a una serie de sub-problemas que son (casi) independientes. En este caso, se pueden estudiar cuidadosamente y en detalle las mejores técnicas para resolver estos sub-problemas escalares. Esta técnica se usa frecuentemente a la hora de resolver sistemas de ecuaciones en más dimensiones.

Una vez discretizado el dominio cabe preguntar cómo obtener las soluciones de las ecuaciones en derivadas parciales 2.13 en cada punto. Para ello, resulta necesario hacer uso de esquemas numéricos basados en el método de diferencias que se explica en el anexo C.

Se han escogido dos métodos explícitos por su adaptabilidad a flujos transitorios.

2.2.1. Esquema de Lax-Friedrichs

El primer esquema que se considera en este trabajo es un esquema de primer orden en el espacio (el error de truncación es del orden de Δx), denominado esquema de Lax-Friedrichs [7].

Para una ecuación general en 1D dada por

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = S, \quad (2.16)$$

este esquema aplica diferencias centradas para las derivadas espaciales,

$$\frac{\partial F}{\partial x} \approx \frac{F_{i+1}^n - F_{i-1}^n}{2\Delta x},$$

y la siguiente aproximación para la derivada temporal:

$$\frac{\partial U}{\partial t} \approx \frac{U_i^{n+1} - \alpha U_i^n}{\Delta t} + (\alpha - 1) \frac{U_{i+1}^n - U_i^n + U_{i-1}^n}{\Delta t}. \quad (2.17)$$

Así, una ecuación general en 1D dada por discretizada por este esquema queda de la manera:

$$U_i^{n+1} = \alpha U_i^n + \frac{1-\alpha}{2} (U_{i+1}^n + U_{i-1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (F_{i+1}^n - F_{i-1}^n) + \Delta t S_i^n, \quad (2.18)$$

con $0 \leq \alpha < 1$. Con el valor $\alpha=1$ el esquema resulta incondicionalmente estable. A medida que α tiende a cero se obtienen una mayor estabilidad y una mayor difusión numérica. En consecuencia, se suele tomar un valor $\alpha = 0,1$.

Este es un método explícito de primer orden en espacio y tiempo. Su estabilidad numérica está sujeta a la condición de Courant-Friedrich-Lewy,

$$\Delta t = \text{CFL} \frac{\Delta x}{(u + c)_{\text{máx}}},$$

donde $0 \leq \text{CFL} \leq 1$.

La extensión del modelo a ecuaciones en 2D es inmediata, para una ecuación general

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = S,$$

resulta:

$$U_{i,j}^{n+1} = \alpha U_{i,j}^n + \frac{1-\alpha}{4} (U_{i+1,j}^n + U_{i-1,j}^n + U_{i,j+1}^n + U_{i,j-1}^n) - \Delta t \left(\frac{F_{i+1,j}^n - F_{i-1,j}^n}{2\Delta x} - \frac{G_{i,j+1}^n - G_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \right) + \Delta t S_{i,j}^n \quad (2.19)$$

La estabilidad de este método se asegura mediante

$$\Delta t = \text{CFL} \cdot \min \left(\frac{\Delta x}{(u+c)_{\max}}, \frac{\Delta y}{(v+c)_{\max}} \right),$$

con $0 \leq \text{CFL} \leq 0,5$.

2.2.2. Esquema de MacCormack

El siguiente esquema se presenta en [6]. Se trata de un método que se descompone en diversos pasos, obteniendo así una precisión de segundo orden en espacio y en tiempo, cuando se aplican los pasos de manera simétrica.

En este caso, el esquema opera resolviendo las ecuaciones en el centro de las celdas de la malla. Está compuesto de una secuencia de dos pasos, en los cuales las derivadas espaciales se toman en direcciones alternativas. Lo ilustraremos en el caso unidireccional. El primer paso es el paso predictivo, que para una ecuación como 2.16, actúa de la manera:

$$U_i^P = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1}^n - F_i^n) + \Delta t S_i^n$$

El segundo paso es el paso corrector, que actúa en este caso:

$$U_i^C = U_i^P - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_i^P - F_{i-1}^P) + \Delta t S_i^P$$

La solución finalmente viene dada por una combinación de ambos pasos, de la manera

$$U_i^{n+1} = \frac{1}{2} (U_i^P + U_i^C).$$

El paso predictivo puede realizarse tanto en diferencias progresivas, como en diferencias regresivas, siempre que el paso corrector se tome en la dirección alternativa. Se trata de un método de segundo orden en espacio y tiempo, también de tipo explícito, cuya estabilidad numérica también está limitada por la condición $\text{CFL} \leq 1$.

La extensión del modelo al caso 2D se realiza como sigue: en la celda i,j -ésima, en un tiempo $(n+1)\Delta t$, la solución de una variable dada, U , viene dada por:

$$U_{i,j}^{n+1} = L_x(\Delta t_x) L_y(\Delta t_y) L_y(\Delta t_y) L_x(\Delta t_x) U_{i,j}^n, \quad (2.20)$$

donde $U_{i,j}^{n+1} = U(i\Delta x, j\Delta y, (n+1)\Delta t)$, $\Delta t_x = \Delta t_y = \Delta t/2$, de manera que cada operador avanza en un intervalo temporal, y L_x y L_y son los operadores unidimensionales compuestos por

una secuencia predictiva y una secuencia correctora, que actúan sobre la solución obtenida del operador anterior. Para ver la discretización de las ecuaciones con mayor detalle, consultar el apéndice D.

Pese a que las derivadas se discretizan con una exactitud de primer orden, actuando con una secuencia simétrica como 2.20 se obtiene una exactitud de orden dos en el espacio y en el tiempo. Además, el carácter particular de esta secuencia hace que el criterio de estabilidad resulte en

$$\Delta t = CFL \cdot \min \left(\frac{\Delta x}{(u + c)_{\text{máx}}}, \frac{\Delta y}{(v + c)_{\text{máx}}} \right),$$

con $0 \leq CFL \leq 0,5$.

Capítulo 3

Resultados numéricos

En este capítulo se validan los modelos numéricos propuestos a través de varios casos test tanto en 1D como en 2D.

3.1. Rotura de presa en 1D

Se comienza simulando una rotura de presa en una dimensión. Este caso resulta de especial interés porque es un ejemplo de flujo no lineal con solución analítica, de manera que permite valorar la funcionalidad del modelo. Se consideran las ecuaciones de aguas poco profundas en una sola dimensión, con un fondo plano y sin rozamiento; por lo que no se tiene ningún término fuente.

Las condiciones iniciales del problema vienen dadas por:

$$h(x) = \begin{cases} 4 & \text{para } x < L/2 \\ 2 & \text{para } x > L/2 \end{cases}, \quad (3.1)$$

con velocidades nulas a lo largo de todo el dominio, que es $L=500\text{m}$. Como condiciones de contorno se considera que los extremos son paredes cerradas, ya que la perturbación no llegará a éstos en el tiempo de simulación, y en consecuencia no afectaran a las soluciones.

El flujo que se genera en una rotura de presa resulta en una ola que viaja corriente abajo mientras que se produce una ola negativa que viaja corriente arriba. Puede verse este resultado para ambos esquemas, junto con la solución analítica, para un tiempo $t=10\text{s}$, en la figura 3.1.

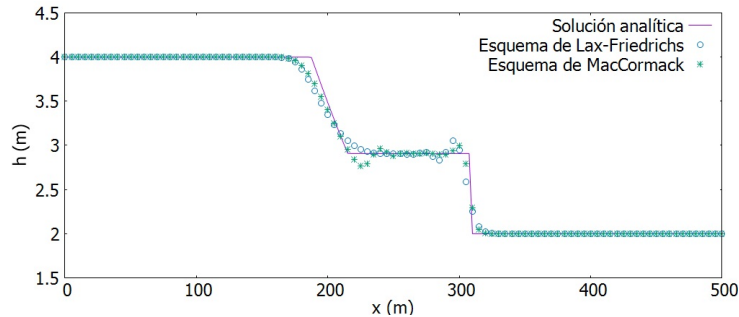


Figura 3.1: Resultados rotura de presa en $t=10\text{s}$, junto con la solución analítica

Estos resultados han sido obtenidos para un número de 100 celdas de tamaño $\Delta x = 5\text{m}$. En la tabla 3.1 se muestran los errores L^1 (cuya expresión se ha obtenido en [8]), junto con el ratio

	Número de celdas	Error L^1	Ratio
Lax-Friedrichs	50	0,032	/
	100	0,018	0,798
	200	0,011	0,689
	250	0,010	0,616
	400	0,007	0,716
MacCormack	50	0,020	/
	100	0,038	0,963
	200	0,019	0,989
	250	0,016	0,920
	400	0,011	0,803

Tabla 3.1: Error L^1 y ratio de convergencia en el caso de rotura de presa

de convergencia, [8], para distintos números de celdas, con ambos esquemas. Puede observarse que efectivamente el ratio de convergencia es mayor para el esquema de MacCormack.

Otro parámetro interesante que puede estudiarse en este caso es la influencia del término turbulento en los resultados del método de MacCormack. En la figura 3.2 se muestran los resultados en función del valor proporcionado al coeficiente μ_T . Puede verse que las oscilaciones en torno a las discontinuidades disminuyen a medida que se aumenta el coeficiente de turbulencia.

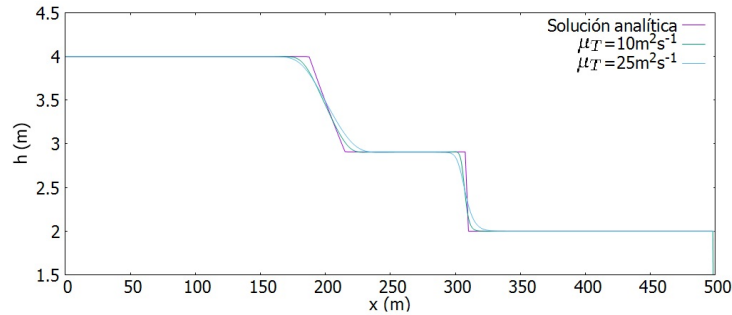


Figura 3.2: Resultados $\mu_T = 5,0 \text{ m}^2/\text{s}$, y $\mu_T = 10,0 \text{ m}^2/\text{s}$ junto con la solución analítica, método de MacCormack

3.2. Simulación de ajuste geostrófico

El siguiente caso test se propone en [2] y [10]. Se trata de extender a dos dimensiones el problema de rotura de presa combinando la propagación de los frentes con el efecto de Coriolis. El fondo es plano, con las condiciones iniciales

$$h(x, y) = 1 + \frac{A_0}{2} \left(1 - \tanh \left(\frac{\sqrt{(\sqrt{\lambda}(x - x_0))^2 + ((y - y_0)/\sqrt{\lambda})^2} - R_i}{R_E} \right) \right),$$

$$u(x, y) = 0,$$

$$v(x, y) = 0,$$

donde $x_0 = 10\text{ m}$, $y_0 = 10\text{ m}$, $A_0 = 0,5$, $\lambda = 2,5$, $R_E = 0,1$, y $R_i = 1$. Se fijan para este caso tanto el parámetro de Coriolis como la gravedad a $f = 1\text{ s}^{-1}$ y $g = 1\text{ m/s}^2$, respectivamente. La condición inicial se muestra en la figura 3.3a.

La malla que se utiliza es de 50×50 para un dominio $20 \times 20\text{ m}^2$. El número CFL se fija a 0.4, y no se considera ningún tipo de rozamiento ni turbulencia. Los contornos se consideran cerrados.

Los resultados obtenidos con ambos esquemas para los tiempos $t=0\text{s}$, $t=4\text{s}$, $t=8\text{s}$, $t=12\text{s}$, $t=16\text{s}$ y $t=20\text{s}$ se muestran en la figura 3.3. Por otro lado, para visualizar bien la asimetría causada por la fuerza de Coriolis, se muestran imágenes en 2D en la figura 3.4, con ambos esquemas. Se puede ver que el sistema evoluciona de manera asimétrica dada la rotación. Se observa también, tanto en ésta última como en la figura 3.3, que se generan dos ondas (de gravedad) de choque que giran. Los resultados obtenidos mediante el esquema de MacCormack (figuras 3.4 y 3.3) son muy similares a los que aparecen en [10], en el caso de los resultados obtenidos con el esquema de Lax-Friedrichs, sin embargo, resultan menos precisos, debido a que se trata de un método de primer orden, por lo que es más difusivo.

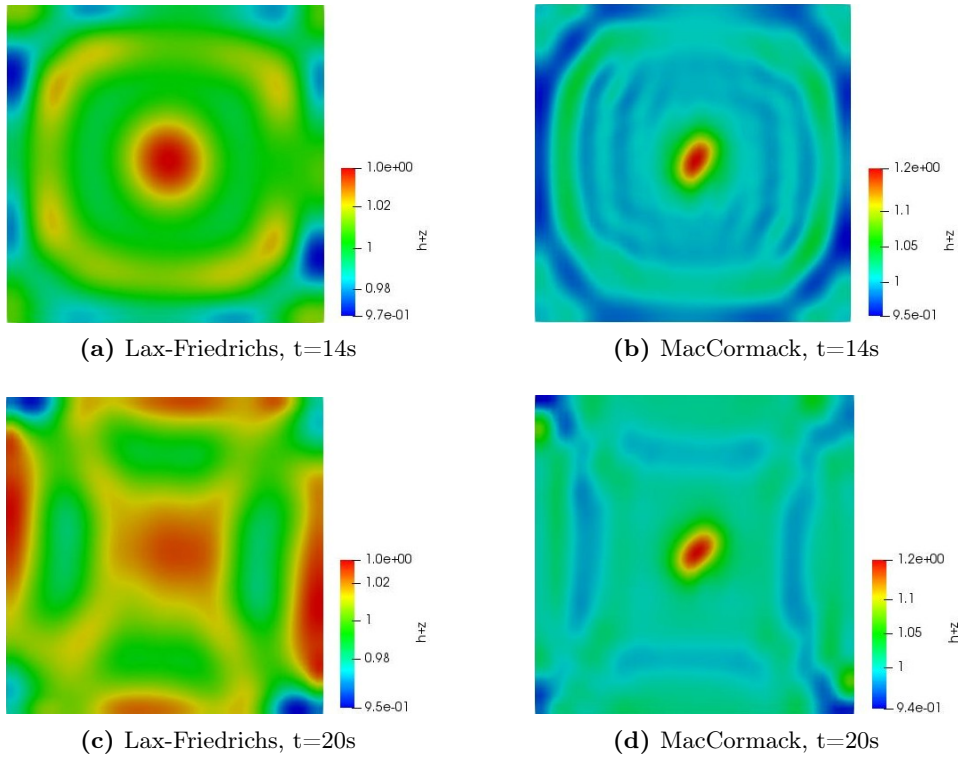
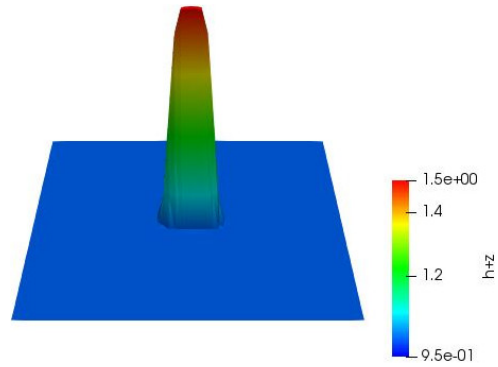
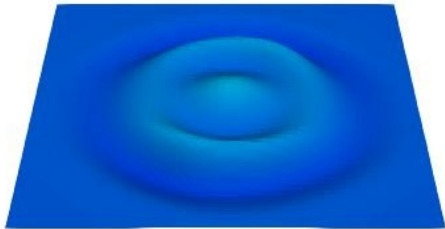


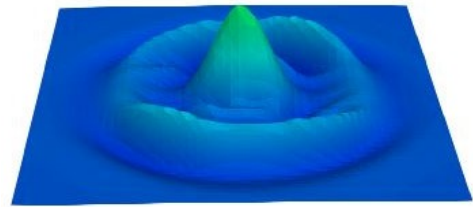
Figura 3.4: Resultados del ajuste geostrófico para diversos tiempos. Análisis de la asimetría



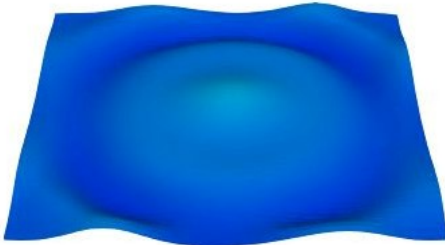
(a) Condición inicial para $h(x,y,t=0)$



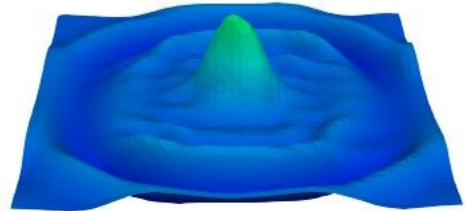
(b) Lax-Friedrichs, $t=8s$



(c) MacCormack, $t=8s$



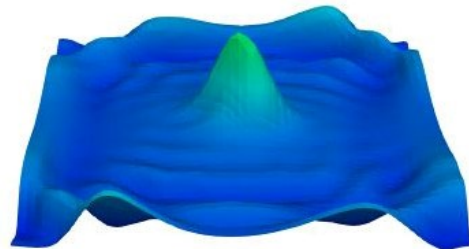
(d) Lax-Friedrichs, $t=12s$



(e) MacCormack, $t=12s$



(f) Lax-Friedrichs, $t=16s$



(g) MacCormack, $t=16s$

Figura 3.3: Resultados del ajuste geostrófico para diversos tiempos

3.3. Flujo de marea en una pendiente de playa

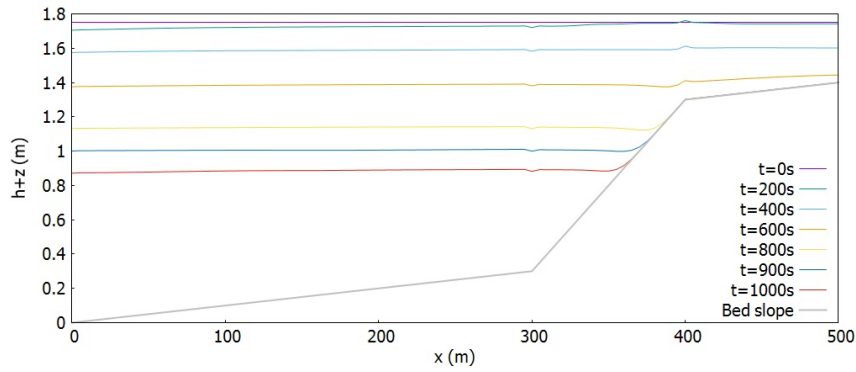
A continuación se considera un caso orientado a analizar el funcionamiento en presencia no solo de variaciones de fondo sino también de la existencia de una frontera seco-mojado, en el que se tiene un fondo con pendiente, que simula el fondo de una playa. Este caso ha sido tomado de [5]. Se tiene el dominio $[0 : 500]m$, en el que el fondo de la playa viene dado por:

$$z(x) = \begin{cases} 0,001 x & \text{para } 0 < x < 300 \\ 0,01 x - 2,7 & \text{para } 300 < x < 400 \\ 0,001 x + 0,9 & \text{para } 400 < x < 500 \end{cases}$$

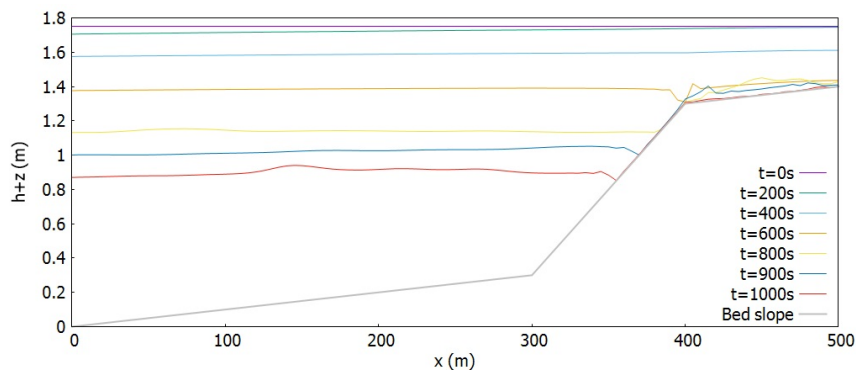
Como condición inicial se tiene $h(x) + z(x, y) = 1,75$ m, junto con velocidades nulas, y se considera una perturbación en $x=0$,

$$h(0, y, t) = 1,0 + 0,75 \cos\left(\frac{\pi t}{1800}\right),$$

que simula la marea.



(a) Esquema de Lax-Friedrichs



(b) Esquema de MacCormack

Figura 3.5: Resultados del flujo de marea en una pendiente de playa

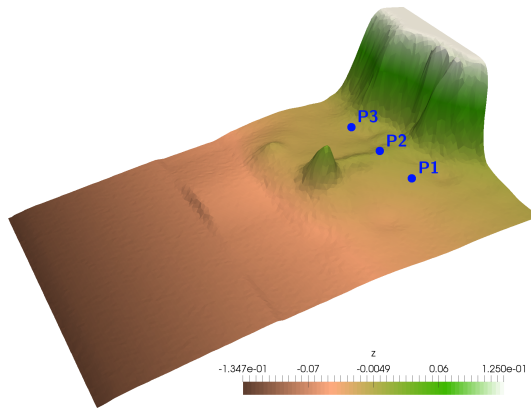
Los resultados obtenidos con los dos esquemas se muestran en la figura 3.5. Ambos métodos necesitan un tratamiento especial de la situación en la que se da el frente de seco-mojado [1] [13].

En este trabajo se ha establecido un umbral para la tolerancia del agua, por debajo del cual se anulan las velocidades. Esta es una de las principales dificultades de estos métodos. Como puede verse, en este caso se obtienen mejores resultados con el esquema de Lax-Friedrichs.

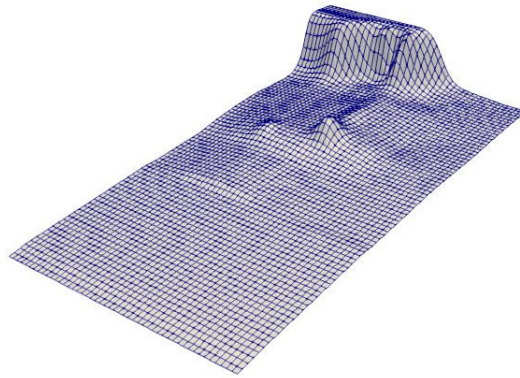
3.4. Tsunami

Como caso final se propone el tsunami de Hokkaido-Nansei-Oki de 1993 que azotó la isla Okushiri, Japón, con una altura extrema de 30m y corrientes del orden de 10-18m/s. Este caso está descrito en [11]. A raíz del suceso se contruyó un modelo semejante a escala de laboratorio sobre el que se reprodujo el fenómeno y sobre el que se tomaron medidas. se muestra en la figura 3.6a, en una escala reducida, a la que se trata el problema.

Se trata de un dominio rectangular, de $5,46 \times 3,36 \text{ m}^2$, y se discretiza en 78×48 celdas de tamaño $\Delta x = \Delta y = 0,07$, tal y como se muestra en 3.6b. Se considera la condición inicial de nivel horizontal en la superficie libre del agua con velocidades nulas.



(a) Batimetría del fondo



(b) Malla del dominio

Figura 3.6: Malla y fondo del caso Tsunami

La condición de contorno en $x=0$ es una perturbación que se lee de un fichero que viene proporcionado en [11], y se muestra en 3.7. El resto de las paredes se consideran cerradas. Por

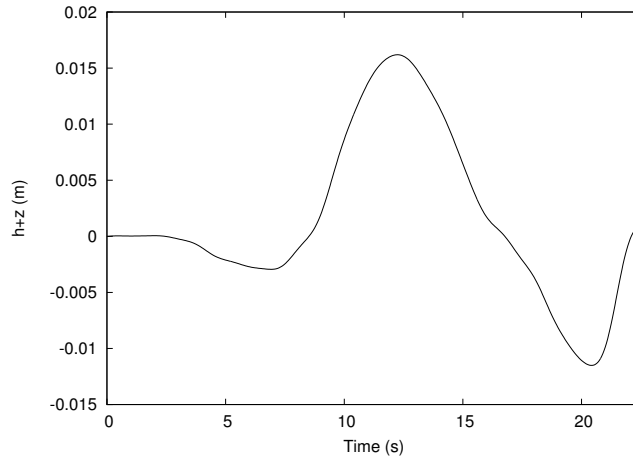
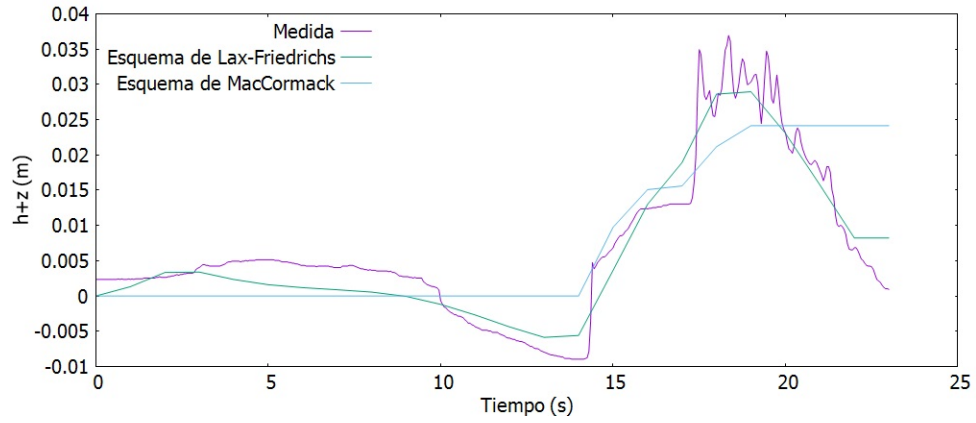
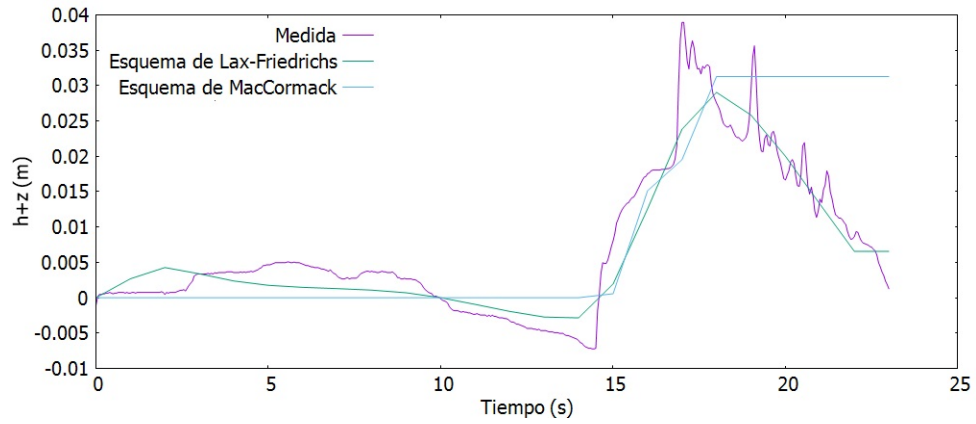


Figura 3.7: Condición de contorno en $x=0$

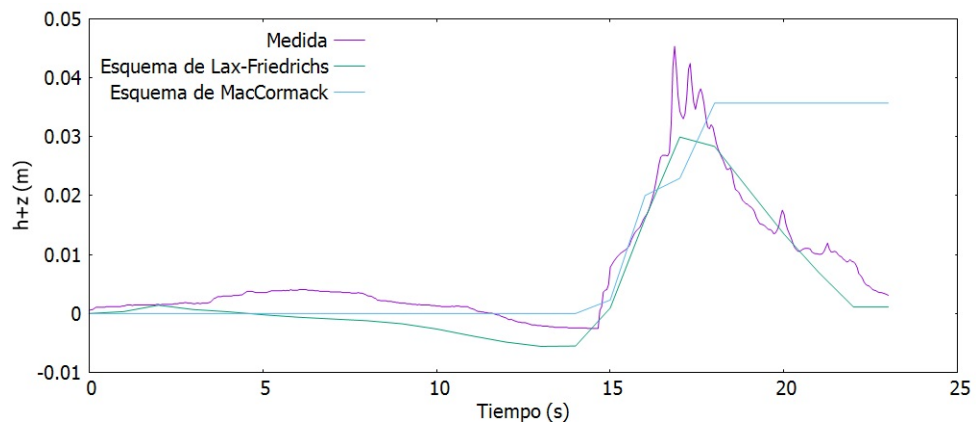
otro lado, en [11] se proporcionan también las historias temporales de la profundidad del agua en tres puntos, el punto P1(4.521, 1.196), el punto P2(4.521, 1.696), y el punto P3(4.521, 2.196), estos puntos vienen señalados en la imagen 3.6a. En la figura 3.8 se muestran los resultados temporales obtenidos en dichos puntos con los esquemas de Lax-Friedrichs y MacCormack junto con las medidas proporcionadas. Como ya se ha mencionado, en este caso se obtienen mejores resultados con el esquema de Lax-Friedrichs.



(a) Punto P1(4.521,1.196)m



(b) Punto P1(4.521,1.696)m



(c) Punto P1(4.521,2.196)m

Figura 3.8: Series temporales de la elevación de la superficie en P1, P2 y P3

Capítulo 4

Conclusiones y trabajo futuro

Se ha descrito en este trabajo el desarrollo de dos métodos numéricos para resolver las ecuaciones de aguas poco profundas en dos dimensiones, por un lado uno el método de Lax-Friedrichs, y por otro lado, el esquema de MacCormack.

Se ha demostrado que ambos modelos son capaces de simular flujos que varían rápidamente, así como flujos que no lo hacen tan rápidamente.

La verificación de los modelos se ha llevado a cabo primero con casos en 1D, a partir de los cuales se ha podido comprobar que funcionan correctamente, ya que comparando los resultados obtenidos con resultados teóricos se observa que ambos esquemas proporcionan buenos resultados.

Se ha comprobado también con el primer caso test que el ratio de convergencia resulta mayor con el esquema de MacCormack, mejorándose por lo tanto los resultados obtenidos con este último respecto con el esquema de Lax-Friedrichs a medida que se incrementa el número de celdas.

Por otro lado, uno de los casos ha permitido también visualizar el problema de seco-mojado, dejando en evidencia que el esquema de MacCormack, siendo de orden mayor, precisa de un arreglo más complejo que el esquema de Lax-Friedrichs.

A continuación, se han propuesto casos en 2D, comprobando que la fuerza de Coriolis, necesaria en la modelización de flujos oceánicos, actúa correctamente en ambos modelos. Puede verse también en estos casos que los resultados obtenidos con el esquema de MacCormack resultan más precisos, debido al mayor orden de precisión, que como ya se ha mencionado ha sido comprobado numéricamente con el caso de rotura de presa.

Finalmente, se presenta el caso bidimensional de un tsunami para visualizar el desempeño del modelo en la vida real, presentando buenos resultados que se asemejan a los datos medidos. En este caso, los resultados obtenidos son algo mejores con el esquema de Lax-Friedrichs, debido a que de nuevo se presenta el problema de seco-mojado ya mencionado previamente. No obstante, el esquema de Lax-Friedrichs, siendo de primer orden, funciona bien en este caso debido a que la perturbación que se tiene es relativamente pequeña, de manera que en casos más extremos se precisaría de un esquema de orden mayor.

En resumen, se puede concluir que los esquemas tratados, siendo esquemas sencillos de primer y de segundo orden, obtienen buenos resultados tanto en la resolución de las ecuaciones de aguas poco profundas en una dimensión, como en el caso de dos dimensiones.

El trabajo futuro se dirigirá a mejorar la aplicación de los esquemas vistos, disminuyendo el error principal introducido por la aparición de zonas secas, por un lado, y adaptándolos a casos

cuyas geometrías resultan mas complejas, mediante mallas irregulares, por otro lado. Además, queda pendiente el estudio de esquemas de mayor orden, con los que poder simular casos reales de mayor complejidad.

Bibliografía

- [1] P. BRUFAU, M.E. VÁZQUEZ-CENDÓN, and P. GARCÍA-NAVARRO. A numerical model for the flooding and drying of irregular domains. *International journal for numerical methods in fluids*, 39:247–275, 2002.
- [2] M.J. CASTRO, J.A. LÓPEZ, and C. PARÉS. Finite volume simulation of the geostrophic adjustment in a rotating Shallow-Water system. *SIAM J. Sci. Comput.*, 31(1):444–447, 2008.
- [3] V. CASULLI. A semi-implicit finite difference method for non-hydrostatic, free-surface flows. *International journal for numerical methods in fluids*, 30:425–440, 1999.
- [4] V. CASULLI and P. ZANOLLI. Semi-implicit numerical modelling of nonhydrostatic free-surface flows for environmental problems. *Mathematical and Computer Modelling*, 36:1131–1149, 2002.
- [5] J. FERNÁNDEZ-PATO. Performance assessment of Finite Volume methods in transient simulations of hydraulic processes (Tesis doctoral), 2019.
- [6] R. GARCIA and R.A. KAHAWITA. Numerical solution of the St. Venant equations with the MacCormack finite difference scheme. *International journal for numerical methods in fluids*, 6:259–274, 1986.
- [7] P. GARCÍA-NAVARRO and E. PLAYÁN (Editores). *Numerical modelling of hydrodynamic systems*. University of Zaragoza, 1999.
- [8] P.H. GUNAWAN. Numerical simulation of shallow water equations and related models (PhD thesis), 2015.
- [9] C.G. KOUTITAS and P.D. SCARLATOS. *Computational modelling in hydraulic and coastal engineering*. CRC Press, Taylor and Francis Group, 2016.
- [10] A.C. KUO and L.M. POLVANI. Nonlinear geostrophic adjustment, cyclone/anticyclone asymmetry, and potential vorticity rearrangement. *Physics of fluids*, 12(5):1087–1100, May 2000.
- [11] P.L.-F. LIU, H. YEH, and C. SYNOLAKIS. Advanced numerical models for simulating tsunami waves and runup. Advances in coastal and ocean engineering. *World Scientific*, 10, 2008.
- [12] X. LU, B. DONG, and X. ZHANG. A two-dimensional depth-integrated non-hydrostatic numerical model for nearshore wave propagation. *Ocean modelling*, 96:187–202, 2015.
- [13] J. MURILLO, P. GARCÍA-NAVARRO, J. BURGUETE, and P. BRUFAU. A conservative 2D model of inundation flow with solute transport over dry bed. *International journal for numerical methods in fluids*, 52:1059–1092, 2006.

- [14] A. NAVAS-MONTILLA and J. MURILLO. 2D well-balanced augmented ADER schemes for the Shallow Water Equations with bed elevation and extension to the rotating frame. *Journal of Computational Physics*, 372:316–348, 2018.
- [15] S. VICENT, J.-P. CALTAGIRONE, and P. BONNETON. Numerical modelling of bore propagation and run-up on sloping beaches using a MacCormack TVD scheme. *Journal on Hydraulic Research*, 39:41–49, February 2010.
- [16] C.B. VREUGDENHIL. *Numerical methods for shallow-water flow*. Kluwer academic publishers, 1994.

Apéndice A

Teorema de Transporte de Reynolds para volúmenes fluidos

El teorema de transporte de Reynolds indica que la variación experimentada por la cantidad total de la variable ϕ en un volumen fluido es:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_f} \phi dV = \frac{d}{dt} \sum_N \phi \delta V = \sum_N \frac{d}{dt} (\phi \delta V),$$

donde se ha realizado la suma sobre las N partículas que componen el volumen fluido.

Desglosando la derivada temporal se obtiene

$$\frac{d}{dt} \int_{V_f} \phi dV = \sum_N \left(\frac{d\phi}{dt} \delta V + \phi \frac{d(\delta V)}{dt} \right).$$

El primer término expresa la variación del parámetro ϕ en una partícula fluida concreta, por lo que se trata de la derivada sustancial, que en general toma la forma

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla),$$

es decir, se trata de la suma de la derivada local y la derivada convectiva. Por otro lado, el segundo término expresa una posible variación del volumen fluido con el movimiento. Reescribiendo ambos términos:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_f} \phi dV = \sum_N \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \delta V + \mathbf{v} \cdot (\nabla \phi) \delta V + \phi \cdot (\nabla \cdot \mathbf{v}) \delta V \right) = \sum_N \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \delta V + \nabla \cdot (\phi \mathbf{v}) \delta V \right)$$

Volviendo a la forma integral y aplicando el teorema de Gauss al segundo término se llega finalmente el teorema de transporte de Reynolds para volúmenes fluidos:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_f} \phi dV = \int_{V_f} \frac{\partial \phi}{\partial t} dV + \oint_{S_f} \phi (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS \quad (\text{A.1})$$

Apéndice B

Ecuaciones de Navier-Stokes

Se deducen las ecuaciones de Navier-Stokes, conjunto de ecuaciones que describe el movimiento de un fluido, a partir del teorema de Reynolds para volúmenes fluidos (anexo A):

$$\frac{d}{dt} \int_{V_f} \phi dV = \int_{V_f} \frac{\partial \phi}{\partial t} dV + \oint_{S_f} \phi (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS \quad (\text{B.1})$$

Las integrales de volumen se realizan sobre el volumen fluido, V_f , ϕ es la variable que se desea analizar, $\mathbf{v} = (u, v, w)$ es la velocidad de las partículas que forman el volumen fluido, y \mathbf{n} es el vector unitario que define la normal de la superficie sobre la que se realiza la última integral, i.e., la superficie que encierra el volumen fluido.

B.0.0.1. Ecuación de continuidad

Partiendo del principio físico de conservación de la masa,

$$\frac{d}{dt} m = 0, \text{ con } m = \int_V \rho dV,$$

donde m es la masa del fluido contenido en un volumen V dado, y ρ es la densidad de dicho fluido, se obtiene, junto con el teorema de transporte de Reynolds, A:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_f} \rho dV = 0 \rightarrow \int_{V_f} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \oint_{S_f} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = 0$$

Finalmete, aplicando el teorema de la divergencia,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{v}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0, \quad (\text{B.2})$$

se llega a la ecuación de continuidad.

B.0.0.2. Ecuación de cantidad de movimiento.

De la segunda ley de Newton o ley fundamental de la dinámica, se deduce que la variación de cantidad de movimiento del volumen fluido es igual a las fuerzas que actúan sobre él:

$$m \cdot \mathbf{a} = \mathbf{F} \rightarrow \frac{d}{dt} (m \mathbf{v}) = \mathbf{F} \rightarrow \frac{d}{dt} \int_{V_f} \rho \mathbf{v} dV = \int_{V_f} \rho \mathbf{f}_m dV + \oint_{S_f} \mathbf{f}_s dS$$

Se divide la fuerza en dos clases: por un lado se tienen las fuerzas de volumen o fuerzas másicas, \mathbf{f}_m , que son debidas a la acción de campos de fuerzas sobre el fluido, como por ejemplo

la gravedad, y por otro lado se tienen las fuerzas superficiales, \mathbf{f}_s , que son fuerzas de tipo normal o tangencial, como son la presión o las fuerzas viscosas, respectivamente.

El vector de esfuerzos superficial viene dado por

$$\mathbf{f}_s = -P \cdot \mathbf{n} + \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau},$$

donde P es la presión, y $\boldsymbol{\tau}$ el tensor de esfuerzos viscosos, que multiplicado por la normal de la superficie bajo consideración proporciona la fuerza superficial viscosa:

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{f}_v$$

Por lo tanto:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_f} \rho \mathbf{v} dV = \int_{V_f} \rho \mathbf{f}_m dV - \oint_{S_f} P \cdot \mathbf{n} dS + \oint_{S_f} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} dS$$

Identificando el parámetro ϕ en el teorema de transporte, B.1, cómo $\phi = \rho \mathbf{v}$:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_f} \rho \mathbf{v} dV = \int_{V_f} \frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} dV + \oint_{S_f} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS$$

Igualando ambas expresiones queda

$$\int_{V_f} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}) dV + \oint_{S_f} (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} dS = \int_{V_f} \rho \mathbf{f}_m dV - \oint_{S_f} P \mathbf{n} dS + \oint_{S_f} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} dS,$$

y aplicando el teorema de la divergencia se obtiene finalmente:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = -\nabla P + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{f}_m \quad (\text{B.3})$$

Al conjunto de ecuaciones de cantidad de movimiento, B.3, y de continuidad, B.2, se les denomina ecuaciones de Navier-Stokes. A partir de estas ecuaciones, que describen los sistemas fluidos en general, se obtienen las ecuaciones gobernantes del sistema concreto que se trata en este trabajo.

Apéndice C

Método de diferencias finitas

En esta sección se explica brevemente el método de diferencias finitas tal y como se hace en [9], ya que resulta muy útil para hallar soluciones numéricas de ecuaciones en derivadas parciales, como las ecuaciones de aguas poco profundas. Este método está basado en la aproximación de derivadas en divisiones de diferencias de valores de las funciones, a partir de un desarrollo de Taylor. Una función $f(x)$ de una variable independiente x se puede expandir en series en la vecindad de un valor de x para obtener el valor de $f(x)$ en un punto cercano $x + \Delta x$ o $x - \Delta x$, de la manera:

$$f(x \pm \Delta x) = f(x) \pm \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x \pm \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{(\Delta x)^2}{2!} \pm \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \frac{(\Delta x)^3}{3!} \pm \dots \quad (\text{C.1})$$

A partir de C.1 se puede deducir

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{\pm} = \pm \frac{f(x \pm \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + O[(\Delta x)], \quad (\text{C.2})$$

donde $O[(\Delta x)]$ es el error de truncación, en este caso del orden de Δx , dado que se desprecian los términos de orden uno.

Esta aproximación es la denominada aproximación lateral en diferencias finitas, siendo $\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{+}$ la diferencia progresiva, y $\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{-}$ la diferencia regresiva.

Como combinación de ambas puede obtenerse

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} + O[(\Delta x)^2], \quad (\text{C.3})$$

que es una aproximación llamada aproximación central en diferencias finitas, cuyo error de truncación tiene orden de Δx^2 , lo que implica que con una reducción del tamaño de los pasos de discretización a la mitad, el error se reduce en una cuarta parte.

Para obtener la aproximación de las derivadas segundas, se parte de nuevo de la serie de Taylor, sustituyendo la expresión anterior en C.1, se obtiene:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{f(x + \Delta x) - 2f(x) + f(x - \Delta x)}{(\Delta x)^2} + O[(\Delta x)^2] \quad (\text{C.4})$$

De esta manera se obtiene una aproximación de las derivadas de una función por sus valores en torno a un punto específico.

Procediendo análogamente con una función dependiente del tiempo, es posible establecer aproximaciones para la derivada temporal.

Apéndice D

Esquema de MacCormack, discretización de las ecuaciones

El esquema de MacCormack se trata de un método que se descompone en diversos pasos, obteniendo así una precisión de segundo orden en espacio y en tiempo, cuando se aplican los pasos de manera simétrica.

El esquema opera resolviendo las ecuaciones en el centro de las celdas de la malla, de manera que en la celda i,j -ésima, en un tiempo $(n+1)\Delta t$, la solución de una variable dada, U , viene dada tal y como se explica en [9] por:

$$U_{i,j}^{n+1} = L_x(\Delta t_x)L_y(\Delta t_y)L_y(\Delta t_y)L_x(\Delta t_x)U_{i,j}^n, \quad (\text{D.1})$$

donde $U_{i,j}^{n+1} = U(i \cdot \Delta x, j \cdot \Delta y, (n+1) \cdot \Delta t)$, $\Delta t_x = \Delta t_y = \Delta t/2$, de manera que cada operador avanza en un intervalo temporal, y L_x y L_y son los operadores unidimensionales compuestos por una secuencia predictiva y una secuencia correctora, que en el caso de las ecuaciones de aguas poco profundas vienen dados por:

- Secuencia predictiva para L_x :

Las derivadas primeras espaciales se discretizan usando una aproximación en diferencias regresivas, las derivadas segundas mediante C.4:

$$\begin{aligned} H_{i,j}^P &= L_x^{(P)} H_{i,j}^0 = H_{i,j}^0 - \frac{\Delta t_x}{\Delta x} (U_{i,j}^0 - U_{i-1,j}), \\ U_{i,j}^P &= L_x^{(P)} H_{i,j}^0 = U_{i,j}^0 - \frac{\Delta t_x}{\Delta x} (F_{i,j}^0 - F_{i-1,j}^0) + \\ &\quad + g\Delta t_x \left(\frac{H_{i,j}^0 + H_{i-1,j}^0}{2} \right) \left[- \left(\frac{Z_{f,i,j} - Z_{f,i-1,j}}{\Delta x} \right) - S_{fx,i,j}^0 \right] + \\ &\quad + \Delta t_x \left(fV_{i,j}^0 - \frac{\tau_{sx,i,j}^0}{\rho} \right) + \epsilon \frac{\Delta t_x}{\Delta x^2} (U_{i-1,j}^0 - 2U_{i,j}^0 + U_{i+1,j}^0), \\ V_{i,j}^P &= L_x^{(P)} V_{i,j}^0 = V_{i,j}^0 - \frac{\Delta x}{\Delta x} (G_{i,j}^0 - G_{i-1,j}^0) + \epsilon \frac{\Delta t_x}{\Delta x^2} (V_{i-1,j}^0 - 2V_{i,j}^0 + V_{i+1,j}^0) \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

- Secuencia correctora para L_x :

Las derivadas primeras espaciales se discretizan usando una aproximación en diferencias

progresivas, las derivadas segundas mediante C.4:

$$\begin{aligned}
H_{i,j}^C &= L_x^{(C)} H_{i,j}^P = \frac{1}{2} \left[H_{i,j}^0 + H_{i,j}^P - \frac{\Delta t_x}{\Delta x} (U_{i+1,j}^P - U_{i,j}^P) \right], \\
U_{i,j}^C &= L_x^{(C)} U_{i,j}^P = \frac{1}{2} \left\{ U_{i,j}^0 + U_{i,j}^P - \frac{\Delta t_x}{\Delta x} (F_{i+1,j}^P - F_{i,j}^P) + \right. \\
&\quad \left. + g \Delta t_x \left(\frac{H_{i+1,j}^P + H_{i,j}^P}{2} \right) \left[- \left(\frac{Z_{f_{i,j}} - Z_{f_{i,j-1}}}{\Delta x} \right) - S_{f_{x_{i,j}}}^P \right] + \right. \\
&\quad \left. \Delta t_x \left(f V_{i,j}^P - \frac{\tau_{sx_{i,j}}^P}{\rho} \right) + \epsilon \frac{\Delta t_x}{\Delta x^2} (U_{i-1,j}^P - 2U_{i,j}^P + U_{i+1,j}^P), \right\} \\
V_{i,j}^C &= L_x^{(C)} V_{i,j}^P = \frac{1}{2} \left[V_{i,j}^0 + V_{i,j}^P - \frac{\Delta t_x}{\Delta x} (G_{i+1,j}^P - G_{i,j}^P) + \epsilon \frac{\Delta t_x}{\Delta x^2} (V_{i-1,j}^P - 2V_{i,j}^P + V_{i+1,j}^P) \right].
\end{aligned} \tag{D.3}$$

■ Secuencia predictiva para L_y :

Las derivadas primeras espaciales se discretizan usando una aproximación en diferencias regresivas, las derivadas segundas mediante C.4:

$$\begin{aligned}
H_{i,j}^P &= L_y^{(P)} H_{i,j}^0 = H_{i,j}^0 - \frac{\Delta t_y}{\Delta y} (V_{i,j}^0 - V_{i,j-1}^0), \\
U_{i,j}^P &= L_y^{(P)} H_{i,j}^0 = U_{i,j}^0 - \frac{\Delta t_y}{\Delta y} (G_{i,j}^0 - G_{i,j-1}^0) + \epsilon \frac{\Delta t_y}{\Delta y^2} (U_{i,j-1}^0 - 2U_{i,j}^0 + U_{i,j+1}^0), \\
V_{i,j}^P &= L_x^{(P)} V_{i,j}^0 = V_{i,j}^0 - \frac{\Delta t_y}{\Delta y} (S_{i,j}^0 - S_{i,j-1}^0) \\
&\quad + g \Delta t_y \left(\frac{H_{i,j}^0 + H_{i,j-1}^0}{2} \right) \left[- \left(\frac{Z_{f_{i,j}} - Z_{f_{i,j-1}}}{\Delta x} \right) - S_{f_{y_{i,j}}}^0 \right] \\
&\quad + \Delta t_y \left(-f U_{i,j}^0 - \frac{\tau_{sy_{i,j}}^0}{\rho} \right) + \epsilon \frac{\Delta t_y}{\Delta y^2} (V_{i,j-1}^0 - 2V_{i,j}^0 + V_{i,j+1}^0).
\end{aligned} \tag{D.4}$$

■ Secuencia correctora para L_y :

Las derivadas primeras espaciales se discretizan usando una aproximación en diferencias progresivas, las derivadas segundas mediante C.4:

$$\begin{aligned}
H_{i,j}^C &= L_y^{(C)} H_{i,j}^P = \frac{1}{2} \left[H_{i,j}^0 + H_{i,j}^P - \frac{\Delta t_y}{\Delta y} (V_{i,j+1}^P - V_{i,j}^P) \right], \\
U_{i,j}^C &= L_y^{(C)} U_{i,j}^P = \frac{1}{2} \left[U_{i,j}^0 + U_{i,j}^P - \frac{\Delta t_y}{\Delta y} (G_{i,j+1}^P - G_{i,j}^P) + \epsilon \frac{\Delta t_y}{\Delta y^2} (U_{i,j-1}^P - 2U_{i,j}^P + U_{i,j+1}^P) \right], \\
V_{i,j}^C &= L_y^{(C)} V_{i,j}^P = \frac{1}{2} \left\{ V_{i,j}^0 + V_{i,j}^P - \frac{\Delta t_y}{\Delta y} (S_{i,j+1}^P - S_{i,j}^P) + \right. \\
&\quad \left. + g \Delta t_y \left(\frac{H_{i,j+1}^P + H_{i,j}^P}{2} \right) \left[- \left(\frac{Z_{f_{i,j}} - Z_{f_{i,j-1}}}{\Delta y} \right) - S_{f_{y_{i,j}}}^P \right] + \right. \\
&\quad \left. + \Delta t_y \left(-f U_{i,j}^P - \frac{\tau_{sy_{i,j}}^P}{\rho} \right) + \epsilon \frac{\Delta t_y}{\Delta y^2} (V_{i,j-1}^P - 2V_{i,j}^P + V_{i,j+1}^P) \right\}.
\end{aligned} \tag{D.5}$$

El superíndice 0 hace referencia a los resultados obtenidos del operador anterior, mientras que el superíndice P y el superíndice N se refieren a los resultados de la aplicación de los operadores

predictivo y corrector, respectivamente. Las variables H , U , V , F , G y S , son:

$$\begin{aligned} H &= h(x, y, t) \\ U &= u(x, y, t)h(x, y, t) \\ V &= v(x, y, t)h(x, y, t) \\ F &= u^2h + \frac{1}{2}gh^2 \\ G &= uvh \\ S &= v^2h + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Y S_{fx} y S_{fy} son los términos de fricción en x e y .

Nótese que tanto para el operador L_x como para L_y se utilizan diferencias regresivas en el paso predictivo y diferencias progresivas en el paso corrector. Sin embargo, en [6] se menciona que, experimentos numéricos han demostrado que los resultados resultan mejores si para los segundos operadores L_y y L_x se utilizan diferencias progresivas en el paso predictivo y diferencias regresivas en el paso corrector, quedando así una discretización simétrica de D.1.